

BORDÓN

Revista de Pedagogía

NÚMERO MONOGRÁFICO / *SPECIAL ISSUE*

Rendimiento en matemáticas y la ciencia de la educación
matemática: evidencia de diferentes naciones
*Mathematics achievement and the science of mathematics
education: evidence from different nations*

María Inés Susperreguy, Blanca Arteaga Martínez y Elida V. Laski
(editores invitados / *guest editors*)



Volumen 70
Número, 3
2018

SOCIEDAD ESPAÑOLA DE PEDAGOGÍA

CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE FUTURAS MAESTRAS DE EDUCACIÓN INFANTIL

Characterization of mathematical knowledge of pre-service teachers of Early Childhood Education

MARJORIE SÁMUEL⁽¹⁾, YULY VANEGAS⁽²⁾ Y JOAQUIN GIMÉNEZ⁽³⁾

⁽¹⁾ *Universidad Católica del Maule*

⁽²⁾ *Universitat Autònoma de Barcelona*

⁽³⁾ *Universitat de Barcelona*

DOI: 10.13042/Bordon.2018.62907

Fecha de recepción: 19/01/2018 • Fecha de aceptación: 09/05/2018

Autora de contacto / Corresponding Author: Marjorie Samuel. E-mail: msamuel@ucm.cl

Fecha de publicación *online*: 13/07/2018

INTRODUCCIÓN. Actualmente, la formación del profesorado en todos los niveles es objeto de estudio permanente. Sin embargo, en el caso de la Educación Infantil, se han realizado pocas investigaciones para analizar el conocimiento matemático de futuros docentes. En este estudio se busca caracterizar el conocimiento matemático inicial de futuras maestras de educación infantil, cuando se enfrentan al análisis de tareas escolares sobre simetría. **MÉTODO.** Se realiza un estudio de caso etnográfico con un grupo de futuras maestras. Se diseña una tarea profesional en la que se pide reflexionar sobre situaciones de simetría y sobre las respuestas de niños y niñas a dichas situaciones. Se analizan las producciones escritas de futuras maestras desde la perspectiva de la competencia docente “mirar profesionalmente”, focalizando el análisis en la destreza identificar los elementos matemáticos de la noción de simetría. **RESULTADOS.** Se identifican tres niveles de la comprensión de la simetría. Las futuras maestras que se encuentran en el nivel alto reconocen al menos tres propiedades de la simetría. En el nivel medio (donde se ubican la mayoría de las futuras maestras del estudio), se identifican una o dos propiedades, justificando fundamentalmente la idea de simetría como patrón de repetición visual y el cambio de orientación de las figuras. En el nivel bajo las futuras maestras reconocen la simetría como una repetición de la forma y el color. **CONCLUSIONES.** En relación a la identificación de los elementos matemáticos relevantes en la tarea profesional planteada, se observa que muy pocas futuras maestras identifican la simetría como transformación punto a punto, confundiendo la simetría axial con central y evidenciando dificultades para reconocer en su totalidad las propiedades que definen a la simetría. En particular no identifican el eje de simetría como invariante de la transformación ni como movimiento involutivo.

Palabras clave: *Competencia docente, Educación infantil, Conocimiento matemático, Simetría.*

Introducción

Desde hace unos años, hay un acuerdo casi total de los educadores matemáticos sobre la formación del futuro maestro de Educación Infantil en el que se señala la importancia de construir un conocimiento del contenido matemático *de* y *sobre* las matemáticas y un conocimiento de la materia para su enseñanza (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2007; Ball, Thames y Phelps, 2008). Existe la hipótesis de que la ausencia de un conocimiento especializado del contenido hace que no se reconozca cómo enfrentar las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas de los niños. Esto se debe, según diversas investigaciones (Espinoza, Barbe y Dinko, 2007; Rivas, Godino y Castro, 2012, entre otros), a que quizá los futuros docentes tienen una débil formación matemática y didáctica. En particular, en el caso de la Educación Infantil, tal y como lo plantean Tsamir, Tirosh, Levenson, Barkai y Tabach (2015), los docentes presentan grandes debilidades respecto al conocimiento geométrico. Además, diversas nociones de la geometría a menudo son ignoradas o minimizadas en la formación escolar en los años iniciales. Según Clements y Sarama (2011), esto puede explicarse por la concepción generalizada de los profesores, que suponen que los niños no pueden aprender ciertos contenidos por su complejidad o porque no se les da suficiente oportunidad para el aprendizaje geométrico.

Numerosas investigaciones sobre la formación del profesorado han puesto de manifiesto la importancia del desarrollo de competencias docentes, entre ellas, una mirada profesional de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Mason, 2002). Desde este enfoque se considera relevante que el futuro docente desarrolle una capacidad que le permita ser consciente de los aspectos de las situaciones de aula, que son importantes para llegar a interpretar el aprendizaje matemático de los estudiantes (Mason, 2011, 2017). De acuerdo con Llinares (2013), el conocimiento matemático que necesitan los

futuros profesores para enseñar está vinculado con el conocimiento de las matemáticas que necesitan para entender el pensamiento matemático de los niños. En este estudio se busca reconocer el conocimiento matemático inicial de futuras maestras de Educación Infantil cuando se enfrentan a tareas escolares de simetría y cuando analizan respuestas de niños y niñas a dichas tareas.

“Mirar profesionalmente” y simetría en Educación Infantil

Aunque la competencia *mirar profesionalmente* ha sido conceptualizada por diversos autores, el planteamiento común que se infiere es el de interpretar situaciones complejas que se presentan en el aula (Fernández y Sánchez-Matamoros, 2015). Para Sherin (2007), la mirada profesional es la capacidad de identificar elementos relevantes en la clase, e interpretar conocimientos disciplinares y pedagógicos adecuados para tomar decisiones pedagógicas. Nos situamos en la conceptualización propuesta por Jacobs, Lamb y Philipp (2010), quienes interpretan la competencia docente *mirar profesionalmente* como la que comprende tener la habilidad de identificar, interpretar y tomar decisiones en las interacciones del profesor en el aula. Se considera que si un docente logra identificar las estrategias matemáticas relevantes de los problemas que se les proponen a los alumnos y en sus respuestas, podrá mejorar la habilidad para interpretar la comprensión de los estudiantes y de esta forma tomar decisiones oportunas sobre el desarrollo de actividades en entornos de aprendizaje robustos (Sherin, Jacobs y Phillip, 2011).

Recientemente la investigación sobre esta competencia se ha centrado en el análisis de cómo los futuros profesores aprenden a *mirar profesionalmente* el pensamiento matemático de los estudiantes sobre conceptos y procesos matemáticos específicos (Bufo, Llinares, Fernández, 2018; Zapatera, 2015, Fernández, Llinares y Valls, 2013, entre otras). En estas investigaciones (que

se centran mayoritariamente en la formación de maestros de Educación Primaria y profesores de secundaria), se remarca que la capacidad de los futuros maestros para interpretar diferentes aspectos de las situaciones de aula debe hacerse desde un punto de vista profesional y, por ello, se considera la necesidad de conectar con otros constructos como el de trayectoria de aprendizaje (Clements y Sarama, 2014). Pero no siempre se cuenta con una trayectoria bien definida por la comunidad de investigadores, para todas las nociones matemáticas como es el caso de la simetría en educación infantil (Bryant, 2009).

La enseñanza y aprendizaje de la geometría en los primeros niveles es fundamental, porque los niños pueden y deben aprender a desarrollar habilidades de razonamiento geométrico desde los primeros años. Potenciando el desarrollo de habilidades y procesos, sentando así una base sólida para el aprendizaje posterior (Brenneman, Stevenson-Boyd y Frede, 2009; Hock, Yunus, Tarmizi y Ayub, 2015, entre otros). La simetría es una noción importante que puede reconocerse en diferentes contextos (Knuchel, 2004). Esta noción es aparentemente conocida por los niños y futuros maestros, pero ello no quiere decir que se tenga bien conceptualizada. Desde una perspectiva fenomenológica, los niños asocian simetría a la idea de equilibrio (De Castro, 2012; De Castro y Quiles, 2014). Según Canals (2009), en el uso de recursos cotidianos como los espejos, los niños pueden reconocer aspectos de la simetría asociados a lo métrico. Por otra parte, cuando se relaciona la simetría en otros contextos, como el artístico, se encuentra que los niños atribuyen un sentido estético a lo que identifican como no simétrico (Bohórquez, 2008). Aunque la idea de transformación aparezca en edades tempranas, en la mayoría de textos escolares y para la formación de maestros de educación infantil, la simetría se presenta a menudo como una noción estática, en la observación de las figuras simétricas o cuando se usa el doblado de papel para ver la construcción de figuras simétricas, sin valorizar otras propiedades importantes como la relación

entre puntos homólogos (Thaqui y Giménez, 2016).

Promover un tratamiento adecuado y rico de la simetría en los años iniciales implica potenciar y mejorar el conocimiento matemático y didáctico de los futuros docentes relacionado con dicha noción. Por ello, consideramos fundamental tener elementos que indiquen cuáles son las miradas matemáticas iniciales que hacen futuros maestros de Educación Infantil cuando analizan diversas experiencias ligadas a la geometría. Situar sus concepciones y posicionamientos iniciales permitirá fomentar una postura reflexiva como motor permanente para la transformación de la práctica docente y su desarrollo profesional (Mc Cray y Chen, 2012; Vanegas y Giménez, 2016).

Aprender a conceptualizar la enseñanza de las matemáticas implica el desarrollo de tres tipos de acciones fundamentales: a) desarrollar la capacidad de “identificar” aspectos de la enseñanza de las matemáticas que pueden tener incidencia en el desarrollo del aprendizaje matemático de los estudiantes; b) “interpretar” el trabajo realizado por los estudiantes y c) tomar decisiones sobre las tareas de enseñanza (Sherin *et al.*, 2010). En este estudio nos centramos en el primer tipo de acciones, es decir, el análisis sobre el conocimiento matemático necesario para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2008). Este estudio pretende aportar nuevo conocimiento sobre la competencia docente *mirar profesionalmente* en relación al conocimiento matemático evidenciado por futuras maestras de Educación Infantil en un tópico matemático poco explorado como la simetría.

Método

Para dar respuesta al objetivo de investigación se opta por un enfoque cualitativo a través de un diseño de estudio de caso con un grupo de futuras maestras de Educación Infantil de forma que los resultados resulten relevantes en

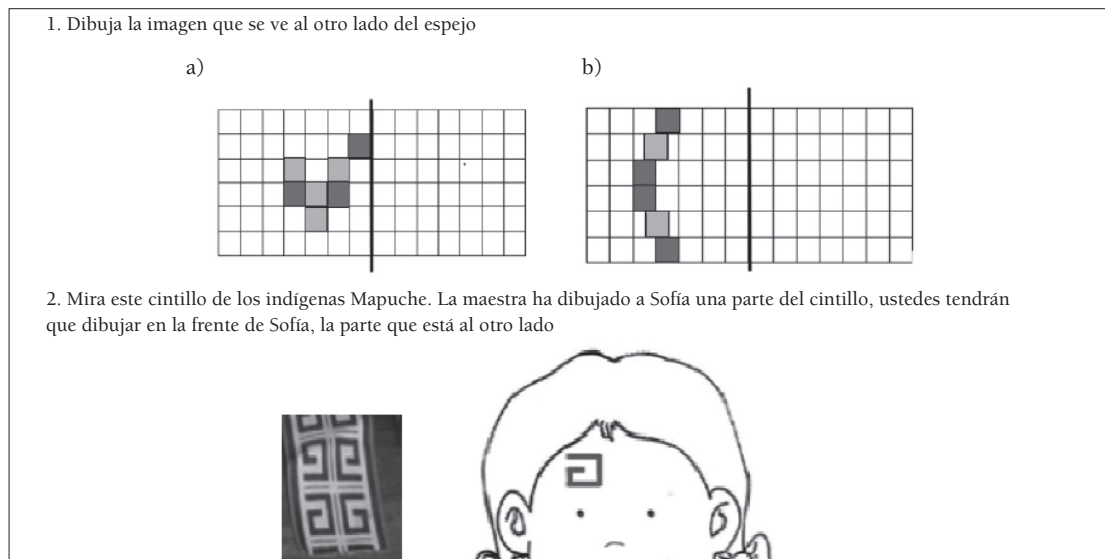
situaciones semejantes (Stake, 1998). El grupo está formado por 11 estudiantes de cuarto año que cursan la asignatura de Didáctica de las Matemáticas, la cual hace parte de la Mención en Matemáticas de la carrera de Educación Parvularia en la Universidad Católica del Maule, en Chile. Cabe destacar que dicho grupo ha tenido una formación previa sobre geometría euclidiana, pero desde una perspectiva muy formal, y no ha tenido experiencia previa en la interpretación de situaciones de enseñanza y aprendizaje.

Se diseñó una *tarea profesional* que se implementó de forma individual y de la cual se obtuvieron los protocolos escritos que se constituyen en los datos de esta investigación. Respecto al diseño de tareas profesionales, nos apoyamos en la idea de que el conocimiento matemático se evidencia en el análisis didáctico de prácticas escolares, donde se tienen en cuenta los objetos y procesos matemáticos emergentes (Giménez, Font y Vanegas, 2013). Se considera que el resultado obtenido en el caso del grupo analizado puede arrojar indicios del conocimiento inicial de los futuros docentes en condiciones similares.

La tarea profesional consta de dos partes. En la primera parte (TP1), se pide a las futuras maestras que respondan a cinco situaciones, las cuatro primeras se corresponden con actividades planteadas a niños de 5-6 años, en donde se exploran diferentes aspectos relacionados con la simetría y la quinta tiene como objetivo la identificación de elementos matemáticos involucrados en dichas actividades.

En la primera situación (TP1-S₁), se pide realizar el simétrico de una configuración dibujada con colores, con un eje vertical. La segunda situación (TP1-S₂) usa una situación antropométrica, a partir del contexto de la artesanía mapuche, y se plantea que se dibuje la parte de un cinturón en la frente de una cara, en el que se visualiza una figura simétrica. La tercera situación (TP1-S₃) pretende que se reflexione sobre la producción de figuras simétricas en el mundo simulado de dibujos de piezas de arquitectura, asociando la simetría al equilibrio. En la cuarta situación (TP1-S₄) se solicita reconocer los ejes de simetría de algunas figuras. Finalmente, en la quinta situación se pide a las

FIGURA 1. Ejemplo de las situaciones 1 y 2 en la primera parte de la tarea profesional



futuras maestras identificar en cuáles de las situaciones anteriores (S_1 - S_4) se construía el simétrico de una figura y qué propiedades de la simetría identificaban en cada una de ellas. En la figura 1 se muestra el planteamiento de las dos primeras situaciones.

En la segunda parte de la tarea profesional (TP2), las futuras maestras debían responder a


dos preguntas profesionales a partir del análisis de las respuestas de cuatro niños a las actividades S_1 a S_3 descritas anteriormente. Las respuestas de los cuatro niños fueron seleccionadas (de un total de 30) por el equipo investigador, ya que representan diferentes niveles de comprensión de simetría de acuerdo a la literatura revisada sobre el conocimiento de la simetría en infantil (Davis, 2015).

FIGURA 2. Fragmento de respuesta de una de las futuras maestras a la TP2

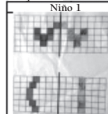
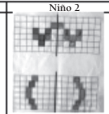
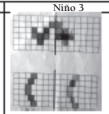
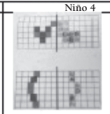
ANÁLISIS DE RESPUESTAS DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN INFANTIL

A continuación se presentan las tareas propuestas a niños de Educación Infantil y algunas de sus respuestas. En el momento del desarrollo, se leyeron las preguntas y las instrucciones para cada caso.


Tarea 1.
La línea negra es un espejo, dibuja lo que se ve al otro lado del espejo



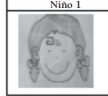
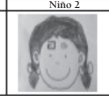
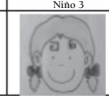

Respuestas

Niño 1	Niño 2	Niño 3	Niño 4
			


Tarea 2.
Mira este cintillo de los indígenas Mapuche. La maestra ha dibujado a Sofía una parte del cintillo, ustedes tendrán que dibujar en la frente de Sofía la parte que está al otro lado.







Respuestas

Niño 1	Niño 2	Niño 3	Niño 4
			

Tarea 3.
En el dibujo vemos la torre que está haciendo Joaquín. Completa la torre.



Respuestas

Niño 1	Niño 2	Niño 3	Niño 4
			

2. Explica las propiedades de la simetría que parece tener en cuenta el niño en cada una de las tareas y las que no ha considerado, pero son necesarias.

Tarea 1.
Considera todas las propiedades de la simetría, ya que existe solo un homólogo, la figura es congruente, tiene en cuenta que hay puntos dobles, la asimetría, ya que logra reflejar correctamente la imagen.

Tarea 2.
El niño cumple parcialmente con la tarea, ya que si bien cumple con la isometría al lograr reflejar el dibujo no dimensiona el tamaño de este, por lo que claramente no puede ser homólogo ni congruente, ni tampoco puntos dobles.

Tarea 3.
El niño cumple con todas las propiedades de la simetría ya que logra realizar correctamente la reflexión, que correspondería a la parte de las isometrías, por lo que es congruente entre sí y homólogo.

↓

Tarea 1
"Considera todas las propiedades de la simetría, ya que existe solo un homólogo, la figura es congruente, tiene en cuenta que hay puntos dobles, la asimetría, ya que logra reflejar correctamente la imagen".

Tarea 2
"El niño cumple parcialmente en la tarea ya que si bien cumple con la isometría al lograr reflejar el dibujo no dimensiona el tamaño de este, por lo que claramente no puede ser homólogo ni congruente, ni tampoco puntos dobles".

Tarea 3
"El niño cumple con todas las propiedades de la simetría ya que logra realizar correctamente la reflexión, que correspondería a la parte de las isometrías, por lo que es congruente entre sí y homólogo".

Las dos preguntas de la TP2 están relacionadas con las dos primeras destrezas que Jacobs, Lamb y Philipp (2010) señalan para el desarrollo de una mirada profesional: identificar las estrategias de resolución e interpretar la comprensión matemática de los estudiantes. La primera cuestión pretende que las futuras maestras identifiquen los elementos matemáticos que consideran utilizan los niños en cada situación propuesta; en la segunda, que identifiquen las propiedades de la simetría que parecen tener en cuenta los niños en cada una de las situaciones y las que no han considerado, pero son necesarias. En la figura 2 se muestra, a manera de ejemplo, parte de la respuesta dada por una de las futuras maestras a una de las preguntas en TP2.

Se analizaron las respuestas de las futuras maestras de Educación Infantil tanto de la TP1 como la TP2, lo que permitió caracterizar su conocimiento matemático inicial sobre los elementos y propiedades matemáticas de la simetría involucradas en cada una de las situaciones: noción figurativa o idea de transformación; constatación de eje de simetría como invariante, equidistancia de puntos homólogos respecto al eje, orientación opuesta de la figura transformada, perpendicularidad del segmento que une un punto con el transformado y el eje de simetría, conservación de la medida como noción de figura isométrica, movimiento involutivo e ideas de congruencia de segmentos y ángulos homólogos.

El análisis realizado se centró en reconocer cómo las futuras maestras identifican elementos y propiedades matemáticas de la simetría y cómo interpretan las producciones matemáticas de niños y niñas y cómo justifican sus acciones (en relación a estos elementos y propiedades). En una primera fase, se asignan códigos a los elementos matemáticos y propiedades de la simetría mencionados en el párrafo anterior. Se hace una asignación de estos códigos a las respuestas dadas por cada una de las futuras maestras a la TP1-S₅. Se construye una tabla en la que se ubican

los elementos y propiedades matemáticas reconocidas por cada una de las futuras maestras.

En una segunda fase, se contrastan los elementos matemáticos y propiedades de la simetría manifestadas por las futuras maestras en la TP1-S₅ (la cual estaba centrada en el análisis de actividades escolares), con los evidenciados en las respuestas dadas a las preguntas de la TP2 (las cuales estaban orientadas al análisis de producciones de niños a dichas actividades escolares). Con ello se reconoció, por una parte, la coherencia en las respuestas de las futuras maestras a las dos partes de la tarea profesional y también permitió valorar de una forma más completa el significado otorgado a las ideas matemáticas aludidas en sus producciones. Finalmente, se asocia a cada futura maestra una caracterización de su nivel de comprensión de la noción de simetría. Dicha caracterización es discutida y consensuada por los tres integrantes del equipo de investigación. A continuación mostramos un ejemplo de este análisis para una de las futuras maestras (tabla 1).

A partir de estos análisis se reconocen los elementos comunes respecto a la idea de simetría y las propiedades aludidas por las futuras maestras. De esta manera, se diferencian tres grupos de maestras que nos permiten caracterizar una parte de la competencia docente *mirada profesional* en cuanto al conocimiento matemático sobre simetría.

Resultados

Se describen en este apartado algunos de los hallazgos que nos permiten caracterizar el conocimiento matemático de futuras maestras de Educación Infantil en relación a la comprensión de la noción de simetría.

En la tabla 2 se muestran los resultados globales cuantitativos de la identificación de elementos matemáticos y propiedades de la simetría, evidenciados en el grupo de futuras maestras estudiado.

TABLA 1. Identificación de elementos matemáticos en TP1 y TP2 de FM2

Respuesta de FM2	Análisis de los elementos matemáticos	Compresión de la simetría
“En las actividades 1, 2 y 3 se construye el simétrico, ya que se debe plasmar en la figura. Las propiedades se encuentran presentes en todas las tareas. Por ejemplo, todos tienen un homólogo y en todas se mantiene la figura congruente” (TP1-S ₃)	Identifica la simetría como transformación, refiriendo a que en ella hay un homólogo y alude a la congruencia, aunque no explicita en qué consiste	Idea matemática incompleta de la simetría centrada en elementos visuales
“En la imagen a) el niño considera los aspectos de ubicación, dirección, distancia, posición de acuerdo a la figura presentada; en cambio en la figura b), el niño considera estos aspectos solo en el primer cuadro gris oscuro y en el último cuadro gris oscuro, ubicando los demás erróneamente” (TP2-P1-N1)	Reconoce que para caracterizar una simetría es preciso que haya distancias iguales. Resalta la importancia de la posición, la ubicación y la dirección, pero no explicita la relación entre estos elementos	Nombra propiedades sin definir las
“... los puntos homólogos de sí mismo (puntos dobles)...” (TP2-P2-N1)	Alude a los puntos dobles, pero de forma incorrecta	

TABLA 2. Reconocimiento de elementos matemáticos en el grupo de futuras maestras

Ideas y propiedades de la simetría	Ejemplo de alusión	Porcentaje de FM
Idea figurativa de simetría	“El niño toma en cuenta la forma de la figura y es capaz de realizarla considerando un eje” (FM3, TP1 S ₃ -TP2-N2)	36,4%
Simetría como cambio	“En las actividades 1, 2 y 3 se está construyendo el simétrico, ya que se está completando figuras de tal forma que sean simétricas” (FM4 TP1-S ₃)	54,5%
Transformación punto a punto	“... todo punto tiene un homólogo...” (FM4, TP1-S ₃)	9,1%
El eje de simetría es un invariante	“... todos los puntos del eje de simetría son homólogos de sí mismos, se dice que son puntos dobles” (FM 5, TP1-S ₃)	27,3%
Equidistancia de puntos homólogos respecto al eje	“... también se mantienen las distancias...” (FM4, TP1-S ₃) “Es una copia que no está bien colocada” (FM11, TP2-N2)	54,5%
Orientación opuesta de la figura transformada	“El otro lado del elemento dado debía ir al revés” (FM5, TP2) “Solo cambia la posición” (FM3TP1-S ₃)	90,9%
Perpendicularidad del segmento AA' y el eje de simetría	Se asume, aunque no se explicita nunca. Solo una FM lo dibuja con una flecha perpendicular	9,1%
Conservación de la medida como noción de figura isométrica	“... como que se forma una figura congruente con la primera al realizar la simetría respecto de un eje, en cuanto forma y tamaño” (FM 4, TP2)	45%
Movimiento involutivo	Nadie lo menciona	–
Congruencia de segmentos y ángulos homólogos	“... transforman los segmentos en segmentos congruentes...” (FM5, TP2)	18,2%

De acuerdo con lo presentado en la tabla 2 se constata que casi todas las futuras maestras consideran que un aspecto esencial de la simetría es la repetición, y la propiedad que mayoritariamente es identificada es la de orientación opuesta de la figura inicial. Otras de las propiedades identificadas por un porcentaje importante del grupo son la equidistancia de los puntos homólogos y la conservación de la medida. La perpendicularidad es una propiedad reconocida por un bajo porcentaje del grupo (9,1%), esto puede deberse a que en la TP1-S₁, el eje de simetría está en una posición vertical respecto a la cuadrícula. Es posible que las futuras maestras interpreten que no se trata de una propiedad sino de un proceso de construcción del simétrico. La propiedad del eje de simetría como invariante es reconocida por apenas un 27,3%. Autores como Harper (2003) y Davis (2015) plantean que esto solo puede verse usando un programa de geometría dinámica. El hecho de que solo el 18% reconozca la congruencia de segmentos y ángulos homólogos puede deberse a que se considere que estos aspectos no son relevantes para la educación infantil. Finalmente, cabe mencionar que una de las propiedades no identificadas por las futuras maestras es la del movimiento involutivo, esto puede deberse a que en las tareas propuestas no se pide hacer dos simetrías consecutivas.

A partir del análisis cualitativo de las producciones de las futuras maestras a la tarea profesional, podemos constatar que usan en sus respuestas una terminología aparentemente formal, pero no relacionan de forma adecuada los términos con la noción correspondiente. Por ejemplo, explicitan tipos de simetría, pero a veces confunden la simetría axial con la simetría central. Lo cual puede reconocerse en afirmaciones del tipo: “Se construye el simétrico de la figura en la actividad 1, 2 y 3. En todas las actividades se identifican las propiedades de la simetría como en la segunda se identifica que la imagen de una figura, mediante la simetría central, es otra figura congruente con la primera, asimismo es en la actividad 1 y 3” (FM11 – TP-2 P5).

En algunos casos, nombran las propiedades de la simetría, sin definirlas. Asimismo, se observa escasa argumentación y justificación sobre lo que aluden. Se observa que la mayoría de las futuras maestras se refieren, de una u otra forma, al cambio de orientación como una propiedad fundamental para las situaciones que involucran la simetría.

Las futuras maestras reconocen que para caracterizar la simetría se precisan ciertas condiciones, pero les es difícil comprender y explicar las relaciones que existen entre los diferentes aspectos, a pesar de haber estudiado teóricamente las propiedades de la simetría. Pocas de las futuras maestras aluden de forma integrada a las propiedades al hablar de lo que hacen los niños en la TP2. Un ejemplo de estas alusiones, es: “En la imagen a, el niño considera los aspectos de ubicación, dirección, distancia, posición de acuerdo a la figura presentada, en cambio en la figura b, el niño considera solo estos aspectos solo en el primer y cuadro gris oscuro y el último, ubicando los demás erróneamente” (FMI 2–TP2–P2).

Al considerar que para construir una simetría se usa el color, el tamaño y la forma, se evidencia que en algunos casos las futuras maestras confunden acciones del niño con análisis de los objetos matemáticos. Por último, cabe mencionar que hay una futura maestra que alude de manera errónea a la simetría, la rotación y traslación, como si se tratarán del mismo tipo de transformación.

A partir del análisis de la manera en que las futuras maestras son capaces de identificar y relacionar diferentes elementos matemáticos tanto en la mirada que hacen de las actividades escolares como en las respuestas dadas por los niños, construimos perfiles que nos han permitido ubicar a las futuras maestras en tres grupos como se muestra en la tabla 3.

Algunas futuras maestras que se ubican en el nivel bajo reconocen errores en la constatación del contenido matemático de los niños. La alusión

TABLA 3. Asignación de niveles de los FM

Nivel	Características	Porcentaje de FM
Bajo	<ul style="list-style-type: none"> • Identifica la simetría como un patrón de repetición • Solo alude al cambio de orientación como propiedad que define la simetría o enuncia propiedades de la simetría sin ninguna argumentación 	54,5%
Medio	<ul style="list-style-type: none"> • Identifica la simetría como cambio, centrándose básicamente en elementos visuales. • Identifica una o dos propiedades de la simetría (congruencia y cambio de orientación) 	27,3%
Alto	<ul style="list-style-type: none"> • Identifica la simetría como transformación punto a punto acercándose a la definición usual de simetría • Identifica tres o más propiedades 	18,2%

puramente nominalista a elementos como orientación espacial y figura isométrica, de alguna manera, podrían hacer pensar en que tienen comprensión de aspectos de la simetría, sin embargo, al momento de contrastar, sus respuestas, con lo realizado por los niños se observan errores, puesto que en ocasiones se explicitan algunos elementos, pero la interpretación se hace de manera matemáticamente inadecuada.

Las futuras maestras que se sitúan en el nivel medio identifican y justifican una o dos propiedades a diferencia del nivel anterior en donde las futuras maestras solo enuncian de forma memorística sin ninguna argumentación. Si bien en el nivel alto se encuentran las futuras maestras que evidencian un acercamiento adecuado a la noción de simetría, ninguna de ellas evoca la totalidad de las propiedades.

Discusión y conclusiones

Como respuesta al objetivo de este estudio se constata que para las futuras maestras de Educación Infantil que participaron en el estudio es complejo analizar y explicitar los elementos matemáticos que subyacen en tareas escolares de simetría. Seguramente, porque hasta el momento no habían realizado tareas de este tipo. Les resulta difícil reconocer las propiedades que definen la simetría axial. Aunque en el análisis

de las producciones de los niños reconocen los errores, no saben explicar de forma matemáticamente correcta el por qué. Estas observaciones son semejantes a las que se han constatado con futuros maestros de Educación Primaria (Pawlik, 2004; Thaqi, Giménez y Rosich, 2011). Constatamos que la totalidad de las futuras maestras percibe el cambio de orientación como distintivo de la noción de simetría. Algunas futuras maestras reconocen la simetría como conjunto de acciones y no como transformación (como se expresa por Leikin, Berman y Zaslavski, 2000); otras interpretan la simetría como simple cambio de posición con equivalencia de medida (isometría) y solo en algún caso como transformación punto a punto. Este tipo de conocimiento débil también se mostró en futuros maestros de Primaria en el trabajo de Thaqi, Giménez y Aljimi (2013). Para alcanzar la noción de simetría como transformación e identificar el eje de simetría como invariante, se requiere una formación que incorpore tareas que consideren una visión dinámica de lo cotidiano (Harper, 2003; Davis, 2015).

Se advierte que una gran parte de las futuras maestras reconocen la simetría de una figura como una simple repetición o patrón a lado y lado de una línea, y que hacen un reconocimiento limitado sobre propiedades estructurales, resultado semejante al planteado por Tsamir, Tirosh, Levenson y Barkai (2018). Tanto la

reflexión sobre las respuestas de los niños, como las respuestas de las futuras maestras a las tareas matemáticas muestran un bajo nivel de conocimiento matemático sobre las propiedades que caracterizan la simetría.

La tarea profesional diseñada e implementada no solo ha permitido reconocer los conocimientos iniciales de las futuras maestras, sino que les ha posibilitado repensar su comprensión de la noción de simetría. Lo cual es fundamental para que cuestionen su propio conocimiento de las matemáticas escolares (Llinares, 2012). La tarea ha permitido identificar y caracterizar tres niveles para la destreza, identificar los elementos matemáticos relacionados con la simetría, de forma semejante a lo realizado en otros estudios sobre el desarrollo de la competencia “mirar profesionalmente”, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Sánchez-Matamoros, Moreno, Callejo y Valls, 2016). Ahora bien, una limitación del estudio es no haber analizado las otras dos destrezas de la competencia docente como son la interpretación y la toma de decisiones.

Poder caracterizar el conocimiento matemático inicial de futuras maestras de Educación Infantil en relación a la noción de simetría es importante, ya que, tal y como lo plantea Llinares (2016), identificar el conocimiento de matemáticas para la enseñanza posibilitará al maestro identificar lo que puede ser relevante en las situaciones de enseñanza de las matemáticas, y apoyar su interpretación de los hechos y evidenciarlos como relevantes. Reconocer las

debilidades de las futuras maestras, hace que pensemos en la necesidad de una formación que integre la reflexión sobre el conocimiento matemático con la interpretación de prácticas de enseñanza, para superar concepciones débiles de las futuras maestras de los primeros niveles en geometría (Gomes, 2003) y otros temas matemáticos. Sugerimos la necesidad de usar entornos interactivos de geometría dinámica para analizar la invariancia como propiedad de las transformaciones geométricas que no han sido usados en este trabajo.

Este trabajo se ha centrado en la caracterización de la destreza identificar (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010). Consideramos que es necesario desarrollar más investigaciones que permitan caracterizar esta y otras destrezas de la competencia docente “mirar profesionalmente” de futuras maestras de Educación Infantil, ya que la información derivada de estas investigaciones se constituye en un aporte fundamental para el rediseño de los programas de formación de docentes.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por la Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología de Chile, (CONICYT) en el marco del programa: Becas Chile. Doctorado en el extranjero. 2013. Resolución 87. Asimismo, se ha desarrollado en el marco de los proyectos EDU2015-65378-P y EDU2016-81994-REDT. MINECO. España.

Referencias bibliográficas

- Ball, D., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bohórquez, H. J., Boscán, L. F., Hernández, A. I., Salcedo, S. y Morán, R. (2009). La concepción de la simetría en estudiantes como un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la geometría. *Educere*, 13(45), 477-489.
- Brenneman, K., Stevenson-Boyd, J. y Frede, E. C. (2009). Math and science in preschool: Policies and practice. *Preschool Policy Brief*, 19, 1-11.

- Bryant, P. (2009). Understanding Space and its Representation in Mathematics. En T. Nunes, P. Bryant y A. Watson (eds.), *Key Understandings in Mathematics Learning*. London: Nuffield Foundation.
- Bufo, A., Llinares, S. y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa – RMIE*, 23(76), 229-251.
- Canals, M. A. (2009). *Transformaciones geométricas* (Los dossiers de María Antonia Canals). Edición profesor. Barcelona: Rosa Sensat.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2007). Un modelo cognitivo para interpretar el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Ejemplificación en un entorno colaborativo. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 25(1), 33-44.
- Chen, J. y McCray, J. (2012). The What, How and Why of effective Teacher Professional development in Early Mathematics Education, *NHSA Dialog: A research to practice Journal for the Early Childhood Field*, 15(1), 113-121.
- Clements, D. H. y Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(2), 133-148.
- Clements, D. H. y Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge.
- Davis, B. (2015) *Spatial reasoning in the early years: Principles, Assertions, and Speculations*. New York: Taylor y Francis. Routledge.
- De Castro, C. (2012). Aparición espontánea de construcciones simétricas durante el juego libre en Educación Infantil. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”*, 82, 23-40.
- De Castro, C. y Quiles, Ó. (2014). Construcciones simétricas con 2 y 3 años: la actividad matemática emergente del juego infantil. *Aula de Infantil*, 77, 32-36.
- Espinoza, L., Barbé, J., Mitrovich, D. y Rojas, D. (2007). El problema de la enseñanza de la geometría en la educación general básica chilena y una propuesta para su enseñanza en el aula. En *II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Uzès. Francia.
- Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary teacher's professional noticing of students' mathematical thinking. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1,2), 441-468.
- Fernández, C. y Sánchez-Matamoros, G. (2015). Mirar profesionalmente el aprendizaje de las matemáticas. Un ejemplo en el dominio de la generalización. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 68, 39-48.
- Giménez, J., Font, V. y Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process. *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study*, 22, 581-590.
- Gomes, A. (2003). *Um estudo sobre o conhecimento matemático de futuros professores do 1º Ciclo. O problema dos conceitos fundamentais em Geometria*. Tese de Doutorado não publicada: Braga. Universidade do Minho.
- Harper, J. (2003). Enhancing elementary pre-service teachers' knowledge of geometric transformations through the use of dynamic geometry computer software. En C. Crawford et al. (eds.), *Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference 2003* (pp. 2909-2916). Chesapeake, VA: AACE.
- Hock, T. T., Yunus, A. S. M., Tarmizi, R. A. y Ayub, A. F. M. (2015). Understanding Primary School teachers' perspectives of teaching and learning in geometry: Shapes and Spaces. En *Research and Education in Mathematics (ICREM7), International Conference on* (pp. 154-159). IEEE.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.

- Knuchel, C. (2004). Teaching symmetry in the elementary curriculum. *The Mathematics Enthusiast*, 1(1), 3-8.
- Leikin, R., Berman, A. y Zavlaski, O. (2000). Learning through teaching: The case of symmetry. *Mathematics Education Research Journal*, 12(1), 18-36.
- Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación matemática*, 10, 53-62.
- Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educación en Revista*, 50, 117-133.
- Llinares, S. (2016). Enseñar matemáticas y aprender a mirar de forma profesional la enseñanza. En G. Perafán, E. Badillo y A. Aduriz-Bravo (coords.), *Conocimiento y emociones del profesorado. Contribuciones para su desarrollo e implicaciones didácticas* (pp. 211-238). Bogotá: Aula de Humanidades, SAS.
- Llinares, S. (2018). Mathematics teacher's knowledge, knowledge-based reasoning, and contexts. *Journal of Math Teacher Education*, 21, 1-3.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: Routledge. Falmer.
- Mason, J. (2011). Noticing: Roots and branches. En M. Sherin, V. Jacobs y R. Philipp (eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 35-50). New York, NY: Routledge.
- Mason, J. (2017). Probing Beneath the Surface of Experience. En E. Schack, M. Fisher y J. Wilhelm (eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks*. Springer (pp. 21-30). Cham, Suiza: Springer.
- McCray, J. S. y Chen, J. Q. (2012). Pedagogical content knowledge for preschool mathematics: Construct validity of a new teacher interview. *Journal of Research in Childhood Education*, 26(3), 291-307.
- NCTM (2013). *Mathematics in Early Childhood Learning*. Reston, VA: ebook.
- Pawlik, B. (2004). On false convictions concerning geometric transformations of the plane in mathematics students' reasoning. En M. Niss (ed.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education*, 10. Roskilde University, Denmark.
- Rivas, M. A., Godino, J. D. y Castro, W. F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros profesores de Primaria, *BOLEMA*, 26 (42B), 559-588.
- Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281.
- Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Callejo, M. L. y Valls, J. (2016). La medida en el Grado en Maestro en Educación Infantil: desarrollo de un módulo de enseñanza. En M. Tortosa, S. Grau y J. Álvarez (coords.), *XIV Jornades de Xarxes d'Investigació en Docència Universitària. Investigació, innovació i ensenyament universitari: enfocaments pluridisciplinaris* (pp. 403-414). Alacant: Universitat d'Alacant, Institut de Ciències de l'Educació.
- Sherin, M. (2007). The development of teachers' professional vision in video clubs. En R. Goldman, R. Pea, B. Barron y S. J. Derry (eds.), *Video research in the learning sciences* (pp. 383-395). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Sherin, M., Jacobs, V. y Philipp, R. (eds.) (2010). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.
- Sherin, M. G., Jacobs, V. R. y Phillip, R. A. (2011). Situating the study of teacher noticing. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs, y R. A. Philipp (eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 3-13). New York: Routledge.
- Sowder, J., Sowder, L. y Nickersson, S. (2010). *Reconceptualising mathematics for elementary school teachers*. Basingstoke. W. H. Freeman.

- Stake, R. (1998). "Case Studies". En N. Denzin y Y. Lincoln (eds.), *Strategies of Qualitative Inquiry*. Thousand Oaks, London, New Delhi: Sage.
- Thaqi, X., Giménez, J. y Rosich, N. (2011). Geometrical transformations as viewed by prospective teachers. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Svoboda (ed.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 578-587). Rzeszow. Poland: University of Rzeszow.
- Thaqi, X. y Giménez, J. (2016). Geometrical Transformations in the Mathematics Textbooks in Kosovo and Catalonia. *Universal Journal of Educational Research*, 4(9), 1944-1949.
- Thaqi, X., Giménez, J. y Aljimi, E. (2015). The meaning of isometries as function of a set of points and the process of understanding of geometric transformation. En K. Krainer y N. Vondrová (eds.), *Proceedings of Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 9* (pp. 591-597). Prague, Czech Republic: Charles University, Faculty of Education y ERME.
- Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R. y Tabach, M. (2015). Early-years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders. *ZDM*, 47(3), 497-509.
- Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E. y Barkai, R. (2018). Early Childhood Teachers' knowledge and Self-efficacy for Evaluating solutions to Repeating Pattern tasks. En I. Ellia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglioni-Franz y C. Benz (eds.), *Contemporary Research and Perspectives on Early Childhood Mathematics Education*. Cham: Springer.
- Vanegas, Y. y Giménez, J. (2016). Observando el espacio, construyendo la geometría con futuros profesores de educación infantil. *Educação e Fronteiras On-Line*, 6(16), 148-161.

Abstract

Characterization of mathematical knowledge of pre-service teachers of Early Childhood Education

INTRODUCTION. Currently, teacher training at all levels is considered as a subject under permanent study. Nevertheless, little research has concentrated on what knowledge prospective Early Childhood Education teachers have of their mathematical skills. In this study, it is sought to characterize the initial mathematical knowledge of future teachers of early childhood education, when faced with the analysis about symmetry in school tasks. **METHOD.** An ethnographic case study is conducted with a group of future teachers of Early Childhood Education. A professional task is designed based on the reflection upon symmetry in school situations and the pupils' answers. We analyze future teachers' written productions from the perspective of noticing competence, focusing on the analysis of identifying mathematical notions and properties. **RESULTS.** Three levels of understanding of symmetry are identified. Future teachers who are at the high level recognize at least three properties of symmetry. At the middle level (where most of the future teachers of the study are situated), one or two properties are identified, basically justifying the idea of symmetry as a pattern of visual repetition and the change of orientation of the figures. At the low level the future teachers recognize symmetry as a repetition of shapes and color. In general, there are difficulties in recognizing all the properties of symmetry. **CONCLUSIONS.** In relation to the identification of the relevant mathematical elements in the proposed professional task, it is observed that very few educators identify symmetry as a point-to-point transformation, confusing sometimes the bilateral symmetry with central symmetry and evidencing difficulties in recognizing all the properties that define

symmetry. In particular, future teachers do not identify neither the symmetry axe as invariant of the transformation nor as involutive movement.

Keywords: *Teaching competence, Early Childhood Education, mathematical knowledge, symmetry.*

Résumé

Caractérisation des connaissances mathématiques des futurs enseignants de l'éducation pré-scolaire

INTRODUCTION. Actuellement, la formation des enseignants à tous les niveaux fait l'objet d'études continues. Cependant, dans le cas de l'éducation préscolaire, peu de recherches ont été effectuées pour analyser les connaissances mathématiques des futurs enseignants. Dans cette étude, nous cherchons à caractériser les connaissances mathématiques initiales des futurs enseignants de l'éducation de la petite enfance, face à l'analyse des tâches scolaires sur la symétrie. **MÉTHODE.** Une étude de cas ethnographique est menée avec un groupe de futurs enseignants. Une tâche professionnelle est conçue dans laquelle on demande de réfléchir sur les situations de symétrie et sur les réponses des enfants à de telles situations. Les productions écrites des futurs enseignants sont analysées du point de vue de la compétence pédagogique «regarder professionnellement» en centrant l'analyse sur la compétence pour identifier les éléments mathématiques de la notion de symétrie. **RÉSULTATS.** Trois niveaux de compréhension de la symétrie sont identifiés. Les futurs enseignants qui sont au niveau supérieur reconnaissent au moins trois propriétés de symétrie. Au niveau intermédiaire (où se situent la plupart des futurs enseignants de l'étude), une ou deux propriétés sont identifiées, justifiant fondamentalement l'idée de symétrie comme un motif de répétition visuelle et le changement d'orientation des figures. Au niveau inférieur, les futurs enseignants reconnaissent la symétrie comme une répétition de la forme et de la couleur. **CONCLUSIONS.** Concernant l'identification des éléments mathématiques pertinents dans la tâche professionnelle plantée, on observe que très peu de futurs enseignants identifient la symétrie comme une transformation point à point, confondant la symétrie axiale avec la symétrie centrale et démontrant des difficultés à reconnaître dans son intégralité, la propriétés qui définissent la symétrie. En particulier, ils n'identifient pas l'axe de symétrie comme invariant de la transformation ou comme un mouvement.

Mots clés: *Compétence des enseignants, éducation préscolaire, connaissances mathématiques, symétrie.*

Perfil profesional de los autores

Marjorie Sámuel (autora de contacto)

Académica de la Universidad Católica del Maule, coordinadora de la mención en Matemática de la carrera de Educación Parvularia del Departamento de Formación Inicial Escolar. Doctora en Didáctica de la Matemática por la Universidad Autónoma de Barcelona.

Correo electrónico de contacto: msamuel@ucm.cl

Yuly Vanegas

Licenciada en Matemáticas. Doctora en Didáctica de las Matemáticas. Profesora asociada del Departamento de Didáctica de la Matemática y Ciencias Experimentales de la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB) y de la Universidad de Barcelona (UB). Investigadora del grupo de investigación consolidado “Práctica Educativa y Actividad Matemática” (GIPEAM).

Correo electrónico de contacto: yulymarsela.vanegas@uab.cat

Joaquín Giménez

Licenciado en Matemáticas. Doctor en Educación. Profesor catedrático del Departamento de Educación Lingüística y Literaria, y Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática de la Universidad de Barcelona. Investigador del grupo de investigación consolidado “Enseñanza y Aprendizaje Virtual” (GREAV).

Correo electrónico de contacto: quimgimenez@ub.edu