Uniciencia Vol. 36(1), pp. 1-17, January-December, 2022
www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.4
E-ISSN: 2215-3470

Errores matemáticos persistentes al ingresar en la formación inicial de profesores de matemática: El caso de la linealidad

Persistent mathematical errors when entering initial teacher math training: the linearity case

Erros matemáticos persistentes ao ingressar na formação inicial de professores de matemática: O caso da linearidade

Maitere Aguerrea[1], **María Eugenia Solís**[1], **Jaime Huincahue**[2]

Received: Dec/17/2020 • Accepted: Jun/16/2021 • Published: Jan/31/2022

Resumen

El objetivo de esta investigación fue identificar errores persistentes de conceptos y procedimientos matemáticos, en particular, la inadecuada aplicación del concepto de linealidad, e implementar situaciones de aprendizaje para abordarlos, para lo cual se diseñan tareas de aprendizaje en contexto de modelización y uso de software matemático. El estudio se aplicó a 42 estudiantes de pedagogía en matemática, durante el periodo 2019-2020. La investigación se realizó desde un enfoque cualitativo y longitudinal. La recolección de datos inició con la aplicación de un test, al ingresar a la carrera, y un segundo test, luego de cursar un semestre de formación. Posteriormente, se implementaron talleres colaborativos para confrontar los errores de linealidad, y se finalizó con la aplicación de un postest. Al ingresar en la formación inicial de profesor de matemática, el estudiantado presentó un alto porcentaje de errores; aplicó linealidad en raíces, potencias, logaritmos y trigonometría. Luego de un semestre en la carrera, estos persistieron. Una vez realizados los talleres, el total de participantes no evidenció errores de linealización en raíces, potencias y trigonometría. Solo algunos estudiantes continuaron aplicando linealidad a expresiones con logaritmos. Se concluye que, al ingresar a estudiar pedagogía en matemática, el estudiantado comete errores en conceptos y procedimientos que debieron ser superados en la enseñanza escolar y que muchos de estos son altamente persistentes, pese a haber cursado asignaturas para la formación de profesor de matemática. También, que su abordaje con situaciones de aprendizaje que articulen modelización con uso de software facilitaría su superación.

Palabras clave: Persistencia de errores matemáticos; errores de linealidad; educación matemática; formación del profesor de matemática

Maitere Aguerrea, maguerrea@ucm.cl, https://orcid.org/0000-0002-7513-982X
María Eugenia Solís, msolis@ucm.cl, https://orcid.org/0000-0002-2454-9351
Jaime Huincahue, jhuincahue@ucm.cl, https://orcid.org/0000-0003-0749-0551
1 Departamento de Matemática, Física y Estadística, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Católica del Maule, Talca, Chile.
2 Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Maule, Universidad Católica del Maule, Talca, Chile.

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.4
E-ISSN: 2215-3470

Abstract

The objective of this research was to identify persistent errors of mathematical concepts and procedures, in particular, the incorrect application of the linearity concept, as well as implement learning situations to address errors of linearity by designing learning tasks in the context of modeling and the use of mathematical software. The study was applied to 42 students in the mathematics education program, during the 2019-2020 period. Research was conducted under a qualitative and longitudinal approach. Data collection began with a test upon entering the program and a second test after completing a semester of classes. Later on, collaborative workshops were implemented to address linearity errors, and a post-test was applied at the end. Upon entering the initial teacher math training, students showed a high percentage of errors, mistakenly applying linearity to roots, powers, logarithms, and trigonometry. After a semester of classes, these errors persisted. After the workshops, none of the participants made linearization errors in roots, powers and trigonometry, and only some continued applying linearity to logarithms. It was concluded that at the beginning of the program, students were still making errors in concepts and procedures that should have been overcome in school, and many of these errors are highly persistent. Using software in learning situations related to modeling would help students remedy those errors.

Keywords: persistence in math errors; linearity errors; mathematics education; math teacher education

Resumo

Esta pesquisa teve como objetivo identificar erros persistentes de conceitos e procedimentos matemáticos, particularmente, a inadequada aplicação do conceito de linearidade, e implementar situações de aprendizagem para abordá-los, para o qual foram desenhadas tarefas de aprendizagem em contexto de modelização e uso de software matemático. O estudo foi aplicado em 42 estudantes de pedagogia em matemática, durante o período 2019-2020. A pesquisa foi realizada a partir de um enfoque qualitativo e longitudinal. A coleta de dados iniciou com a aplicação de um teste, ao ingressar na universidade, e um segundo teste, depois de cursar um semestre de formação. Posteriormente, foram implementadas oficinas colaborativas para confrontar os erros de linearidade, e finalizou com a aplicação de um pós-teste. Ao ingressar na formação inicial de professor de matemática, os estudantes apresentaram uma alta porcentagem de erros; aplicaram linearidade em raízes, potências, logaritmos e trigonometria. Após um semestre na universidade, estes persistiram. Uma vez realizadas as oficinas, o total de participantes não evidenciou erros de linearização em raízes, potencias e trigonometria. Só alguns estudantes continuaram aplicando linearidade a expressões com logaritmos. Conclui-se que, ao ingressar na universidade para estudar pedagogia em matemática, os estudantes cometem erros em conceitos e procedimentos que deveriam ter sido superados na escola e que muitos destes são altamente persistentes, embora tenham cursado matérias para a formação de professor de matemática. Também, que sua abordagem com situações de aprendizagem que articulem modelização com uso de software facilitaria sua superação.

Palavras-chave: Persistência de erros matemáticos; erros de linearidade; educação matemática; formação do professor de matemática

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.4
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

Introducción

Durante los últimos años, muchas investigaciones han estudiado las dificultades y errores en conceptos y procedimientos matemáticos en estudiantes, con el objetivo de diseñar y construir modelos que permitan la identificación y comprensión de conceptos mal aprendidos, además de su superación (Ruano, 2008; Rico 1998; Socas, 2007). Estos estudios coinciden en que una característica causal del error es la validación de conceptos y procedimientos matemáticos deficientemente desarrollados, que llevan al estudiante a hacer interpretaciones y argumentaciones incorrectas. El error también es visto como una oportunidad de aprendizaje, por lo que su estudio, desde cualquier perspectiva, será una contribución a la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Estudios enfocados en educación superior han identificado errores y dificultades en el estudiantado al ingresar a la universidad, y han analizado su impacto en la calidad de los aprendizajes matemáticos durante los primeros años de su formación (Bolaños-Baquero, 2021; Díaz *et al*., 2015; Gamboa *et al*., 2019; Mena-Lorca *et al*., 2015; Socas *et al*., 2014). Los errores -y su persistencia- surgen por la creciente exigencia cognitiva que tiene el estudiantado en este nivel, reflejada en una mayor demanda de habilidades como la reflexión, el razonamiento y la aplicación de destrezas matemáticas, habilidades que debieron ser desarrolladas progresivamente en su escolaridad, y que repercuten tanto al ingresar a la universidad como para mantenerse en ella.

En Chile, el estudiantado ingresa a carreras de pedagogía en matemática con puntajes por debajo de los estándares promedio en las pruebas nacionales y con una preparación insuficiente (Pino-Fan *et al*., 2018). En estos casos, si estas dificultades no son abordadas en forma temprana y eficazmente, podrían obstaculizar el desarrollo de las competencias matemáticas y, por ende, la progresión de la formación inicial del profesor de matemática. Asimismo, respecto al conocimiento matemático, didáctico y pedagógico de profesores noveles de matemática en Chile, los estudios revelan que estos presentan dificultad en el reconocimiento de conceptos y procedimientos errados, así como también en la identificación y análisis de argumentos incorrectos, lo que significa una debilidad del contenido pedagógico y didáctico para la interpretación del pensamiento del alumnado, y un obstáculo para los procesos de retroalimentación en su praxis (Mineduc, 2018; TEDS-M, 2013).

En esta investigación, el foco principal son los errores que cometen estudiantes al ingresar en la formación de profesores de matemática. Un tipo de error recurrente y persistente en sus producciones es la aplicación de propiedades de linealidad en objetos matemáticos que no la tienen, lo que también conlleva a cometer otros errores. Por ejemplo, la linealidad incorrectamente aplicada en potencias, radicales, logaritmos y en trigonometría, presentes en la resolución de diversos problemas del estudiantado, genera una barrera en otros conocimientos cuando son utilizados como herramientas. Escudero y Domínguez (2014) detectaron errores en estudiantes de bachillerato, que aplican erradamente propiedades de linealidad como los siguientes: $\left(\frac{3}{8}-1\right)^3=\left(\frac{3}{8}\right)^3-1^3$, $\sqrt[5]{2}-\sqrt[5]{2^4}=\sqrt[5]{2^3}$, $\log(2-y)=\log(2)-\log(y)$, $sen(90^\circ-20^\circ)=sen(90^\circ)-sen(20^\circ)$. Según los autores, estos errores podrían ser causados por inferencias, asociaciones incorrectas o por la recuperación de un esquema previo. Estos

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.4
E-ISSN: 2215-3470

tipos de errores, que se mantienen persistentes al resolver problemas que involucran los objetos matemáticos mencionados, son producto de la tendencia del estudiantado a realizar generalizaciones de propiedades previas, aprendidas en otros contextos y que se aplican en forma no consciente en situaciones que necesitan resolver.

Cervantes y Martínez (2007, 2013) estudiaron el error $(x \pm y)^n = x^n \pm y^n$, cometido por estudiantes de educación superior, mediante la confrontación de esquemas y procedimientos algebraicos, utilizando Derive 5 como software dinámico mediador. Sus resultados muestran que el uso del software ayudó al estudiantado a generar desarrollos válidos de estas expresiones de forma inductiva.

Socas *et al*. (2016) abordaron las dificultades y errores de estudiantes de educación secundaria, desde el análisis didáctico de tareas de modelización, y concluyeron que el origen más frecuente de los errores es la ausencia de sentido, manifestado en aspectos no resueltos de la aritmética, la geometría y el lenguaje algebraico. Al respecto, la modelización supone distintos procesos de construcción, ajustes o uso de modelos, que permiten distintas representaciones de las ideas matemáticas, los cuales se distinguen de una enseñanza reducida a manipulación de expresiones simbólicas o de la solución de problemas sin contextos significativos para el alumnado.

Para ir más allá de los procedimientos técnicos de cálculo, y dar sentido a los objetos matemáticos, Duval (2006) propone realizar cambios en la forma en que las tareas y los problemas se seleccionan para el aprendizaje, considerando las variables cognitivas relativas a diversas maneras de representación, de tal forma que se contribuya al desarrollo de capacidades de visualización, razonamiento u organización de la información. En este camino, las tareas de modelización matemática, por lo general, consideran componentes visuales y analíticos, claves para la comprensión, la formulación de conjeturas, la generalización y la justificación (Godino *et al*., 2012; Torregrosa *et al*., 2010).

Por su parte, las herramientas tecnológicas han adquirido, en los últimos tiempos, un rol importante para propiciar ambientes de descubrimiento y reflexión, facilitando la visualización y la comprensión de los objetos matemáticos (Bejarano y Ortiz, 2018).

En síntesis, es evidente la presencia de errores en los aprendizajes matemáticos de los escolares y su persistencia al entrar a la universidad. En la formación del profesor de matemática, los errores terminan convirtiéndose en verdaderos obstáculos para el desarrollo del conocimiento matemático. Por ello, es necesario realizar acciones explícitas en su formación, atendiendo tempranamente las dificultades propias del alumnado al ingresar. En este camino, se formularon las siguientes preguntas de investigación: entre los errores matemáticos que evidencian estudiantes que ingresan a estudiar pedagogía en matemática, ¿se manifiesta una inadecuada aplicación del concepto de linealidad?; ¿tales errores persisten a pesar de cursar un semestre de formación?; y ¿cómo podemos abordar estos errores desde una propuesta de modelización utilizando la tecnología?

A partir de esta problemática nos planteamos los siguientes objetivos: 1) Identificar errores de conceptos y procedimientos matemáticos de estudiantes, en particular, si la inadecuada aplicación del concepto de linealidad está presente en estos procedimientos, al inicio del primer semestre de una carrera de pedagogía en matemática.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.4
E-ISSN: 2215-3470

2) Identificar la persistencia de los errores transcurrido el primer semestre de formación. 3) Diseñar, validar e implementar una propuesta didáctica de enseñanza para la superación de errores persistentes, transcurrido el primer año de formación.

Marco teórico

Errores y persistencia. El error es inherente a la actividad humana y una oportunidad permanente para contribuir a los procesos de enseñanza y aprendizaje. El error matemático puede llegar a formar parte del conocimiento que emplea el alumnado en la resolución de problemas y su reconocimiento puede propiciar una oportunidad eficaz en el mejoramiento del conocimiento matemático, mediante adecuadas intervenciones didácticas y múltiples vías de atención (Rico, 1998). La complejidad de los objetos matemáticos y los distintos estados de comprensión de tales significados pueden generar errores y dificultades en conceptos y procedimientos matemáticos (Socas, 2007), por lo cual, detectar tempranamente los errores en el conocimiento del alumnado, indagar sobre sus causas y desarrollar propuestas de enseñanza para abordarlos y superarlos son una preocupación permanente de educadores e investigadores.

Rico (1998) propone dos líneas de desarrollo respecto a los errores, en las cuales se orientó esta investigación: el tratamiento curricular de los errores y su abordaje desde su diagnóstico, proponiendo los medios para enfrentarlos, incentivando desde el error el aprendizaje del conocimiento matemático; y, por otra parte, desde la formación de profesores de matemática, para lograr la detección y corrección de errores, mediante observación, análisis, interpretación y tratamiento.

Existen múltiples aproximaciones teóricas que problematizan el error. A partir de corrientes constructivistas, el error es el resultado de la aplicación de un conocimiento en un contexto inadecuado, pudiendo ser considerado como un indicador relevante del proceso de aprendizaje, ya que su presencia impide otros aprendizajes. En este caso, "el docente puede inducir a los escolares a incurrir en el error, hacer que constaten su error y generar el conflicto cognitivo que les lleve a modificar su conocimiento" (González *et al*., 2015, p.74). Al respecto, Gamboa et. al (2019) los definen como manifestaciones que provienen de las dificultades del alumnado, entendiendo una dificultad como un indicador del grado de éxito frente a una tarea. Por su parte, Socas (2007) considera el error como un esquema cognitivo inadecuado que tiene distintas procedencias. Así, siguiendo estos enfoques, en esta investigación entendemos el error como el resultado de un conocimiento aplicado en un contexto equivocado o un esquema cognitivo inadecuado, que puede impedir otros aprendizajes y ante el cual el docente puede interferir para modificarlo.

En el caso de errores de tipo algebraico, Socas (2007) argumenta que provienen de errores propios de la aritmética, de los procedimientos utilizados o, incluso, de las características propias del lenguaje algebraico. En el caso de los errores relacionados con la factorización, Bolaños-Barquero y Segovia (2021) concluyen que lo que genera errores en los procedimientos de factorización en el estudiantado es la falta de sentido estructural algebraico. Además, Bolaños-González y Lupiáñez-Gómez (2021) identifican que el error más frecuente se relaciona con los diferentes usos de las letras, ya sea como incógnita de valor específico, como número generalizado o como

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.4
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

variable. Ambos resultados son concordantes con la exhaustiva revisión bibliográfica de García *et al*. (2012), al plantear que las causas de los errores matemáticos pueden ser de carácter procedimental, de carácter conceptual u originados en la adquisición del conocimiento algebraico.

Cabe destacar que los errores emergen, en su mayoría, en los niveles escolares obligatorios previos, en las áreas de aritmética, álgebra, geometría y, datos y azar (Agencia de Calidad de la Educación, 2017; Escudero y Domínguez, 2014). En estos niveles, se han reportado errores en la comprensión del sistema numérico racional, en las propiedades de potencias, raíces y logaritmos (González *et al*., 2018; Socas *et al*., 2016), en la operatoria algebraica, factorización y reconocimiento de productos notables, en la representación algebraica de diferentes situaciones, en sistemas de ecuaciones, en funciones lineales y cuadráticas (Díaz *et al*, 2015; Rodríguez-Domingo *et al*., 2015; Ruano *et al*., 2008), errores en la representación de puntos, en vectores o figuras en el plano cartesiano, en la medida de lados en figuras semejantes y errores en la interpretación de gráficas (Ramírez-Uclés *et al*., 2018; Zaldívar y Briceño, 2019).

Existe todavía mucho que explorar y conocer sobre los errores matemáticos en la formación inicial de profesores de matemática. Socas *et al*. (2014) analizaron las dificultades y errores que se manifiestan en la resolución de problemas matemáticos, evidenciando dificultades relacionadas con el conocimiento lingüístico, semántico, la estructura del problema, el lenguaje o las representaciones, los razonamientos, las estructuras matemáticas y el conocimiento de los procesos. Por otro lado, Nortes *et al*. (2016) estudiaron errores y dificultades en futuros maestros que suceden en la resolución de problemas matemáticos elementales, identificando un alto porcentaje de errores aritméticos, en uso de paréntesis, en la interpretación de datos, en el uso de escalas numéricas y en el uso de conceptos geométricos, logrando determinar que estos errores se mantienen en el tiempo, pese a que los estudiantes han cursado asignaturas matemáticas en su formación. Esta persistencia es un punto de interés en nuestra investigación y tomaremos como referencia la visión de Rico (1998) respecto a la dificultad didáctica que genera.

> Los errores son a menudo extremadamente persistentes, debido a que pueden reflejar el conocimiento de los alumnos sobre un concepto o un uso particular de reglas nemotécnicas. Son resistentes a cambiar por sí mismos ya que la corrección de errores puede necesitar de una reorganización fundamental del conocimiento de los alumnos. Son persistentes, particulares de cada individuo y difíciles de superar. (p. 84)

Para evidenciar las complejidades que atañen al concepto de persistencia y resistencia, en la investigación realizada por Mena-Lorca *et al*. (2015), con estudiantes de pedagogía, profesores de matemática y estudiantes de maestría, se estudiaron los errores asociados a la noción de infinito en la igualdad $0,\overline{9} = 1$, reconociendo una persistencia tal que se cuestionaba la igualdad, incluso, luego de observar distintos procesos que demostraban el resultado, planteando una persistencia que va más allá del error, basada en el infinito como un obstáculo epistemológico.

Por otro lado, Caronía *et al*. (2014), desde un diseño longitudinal, estudiaron la persistencia de errores en estudiantes

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.4
E-ISSN: 2215-3470

universitarios de primer año e identificaron los errores más frecuentes en la aplicación incorrecta de propiedades (ecuaciones con radicales, exponenciales y logarítmicas), en el manejo de expresiones algebraicas y en la lectura y comprensión de enunciados; luego de transcurrir dos semestres académicos, un porcentaje de estudiantes mejoró sus errores, sin embargo, constataron casos que mostraron persistencia y omisión de problemas que contestaban correctamente al ingresar a la universidad, además de nuevos errores, lo cual indica la necesidad de implementar nuevas estrategias curriculares para su abordaje.

En consecuencia, debido a que los estudiantes en formación inicial docente también cometen errores, susceptibles a persistencia y resistencia, esta investigación se enfocó en identificarlos y abordarlos, propiciando la reorganización del conocimiento errado y su modificación, acciones que llegan a ser ineludibles en la formación del profesor de matemática.

Modelización y tecnología. La modelización en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática ha sido tema de estudio en las últimas décadas, ampliamente considerada como un proceso que vincula la realidad y las matemáticas, destacando algunas conexiones intramatemáticas, por ejemplo, numéricas, algebraicas, analíticas o geométricas; se caracteriza, en ocasiones, por la búsqueda de regularidades, cuando no se explicitan patrones o procedimientos (Socas, 2016; Zaldívar, 2019). Por otra parte, el diseño y resolución de tareas de modelización para generar aprendizaje comprensivo en el estudiantado es, en la actualidad, un tema de interés en investigadores y docentes, así como la investigación didáctica sobre el uso de modelización en los procesos educativos (Ferrando, 2019). El mismo autor concluye, en su estudio, que el uso de la modelización en la práctica educativa promueve positivamente el desarrollo de la competencia matemática, además de otorgarle un sentido funcional.

En este estudio tomaremos como referencia, para el abordaje del error persistente, el enfoque dado por Socas *et al*. (2016). Según los autores, un proceso de modelización es un proceso esencial de la matemática que se transfiere a otras áreas del conocimiento. Este se desarrolla mediante cinco fases: (1) sistematización, explicitación y reconocimiento de la regla; (2) matematización o formulación en términos de la regla; (3) resolución en términos de la regla, mediante la representación elegida, lo que comporta el análisis del modelo construido; (4) validación (verificación) de la regla; e (5) interpretación, lo que es concordante con corrientes individualizadas sobre el proceso de modelar. Desde este punto de vista, las tareas de modelización pueden tener una naturaleza intramatemática. En esta investigación, se implementan tareas geométrico-algebraicas con apoyo de software educativo, que ponen de manifiesto los errores que se comenten, para promocionar en el alumnado la exploración de patrones y procedimientos no explicitados para la reconstrucción de su conocimiento. Además, este enfoque de modelización es de interés por la factibilidad de aplicarlo en intervenciones didácticas remotas.

Por otro lado, la integración de las tecnologías educativas, como mediadoras de procesos de exploración, visualización y generalización matemática, es recurrente en las tareas de modelización (Ferrando 2019). Varias investigaciones han logrado evidenciar que la incorporación del software GeoGebra en los procesos de enseñanza y aprendizaje mejora el rendimiento

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

académico del estudiantado (Bejarano y Ortiz, 2018; Iranzu, 2009; Villagrán, 2018). En la investigación de Bejarano y Ortiz (2018), realizada en estudiantes universitarios, se observó que las características dinámicas de GeoGebra, en una situación de modelización centrada en las funciones reales, potenciaron el interés por aprender e incentivaron el trabajo colaborativo mediante el análisis y la reflexión. Por su parte, Iranzu (2009) evidencia que GeoGebra favorece la visualización de problemas matemáticos, al facilitar la comprensión de los registros algebraicos y evitar obstáculos que generan los objetos algebraicos.

Considerar los conocimientos profesionales del profesor escolar para proponer tareas y actividades en la formación inicial docente daría, al profesor, herramientas didácticas para una organización más efectiva de la enseñanza de los contenidos matemáticos (Socas *et al*., 2014). Siguiendo esta línea, en esta investigación se abordó el error de los propios estudiantes, situándolos en tareas de análisis e interpretación de producciones propias de escolares, donde se ponen en juego sus dificultades, obstáculos y errores. El diseño de las tareas consideró problemas matemáticos y procesos de modelización, utilizando GeoGebra, para la toma de conciencia del error y la reconstrucción del conocimiento.

Metodología

El presente estudio se enmarca en un enfoque cualitativo y longitudinal, con el fin de explorar y describir los distintos estados del conocimiento matemático, en un grupo de estudiantes en formación docente para profesor de matemática. Se da comienzo con la identificación de errores y su persistencia, luego se realizan experimentaciones y, finalmente, se aplica un postest. Participaron en esta investigación 42 estudiantes que ingresaron a una carrera de pedagogía en matemática de una universidad chilena, firmaron un consentimiento informado para su incorporación voluntaria a cada una de las cuatro etapas que componen esta investigación.

La primera etapa estuvo centrada en la identificación de errores matemáticos cometidos por estudiantes que ingresaron a la carrera en el 2019. Se construyó un test diagnóstico de 59 preguntas de elección múltiple, generado con el análisis bibliográfico de errores matemáticos que suceden al ingresar en la educación superior (Cervantes y Martínez, 2007; Gamboa *et al*., 2019; López *et al*., 2018) y se estableció una categorización por contenido y objetivo de aprendizaje según el currículo nacional chileno (Mineduc, 2009). Posteriormente, la prueba fue validada por el comité curricular de la carrera, constituido por académicos vinculados en la formación de profesores de matemática; luego de ajustes menores, fue aplicado en el mes de marzo de 2019, al ingresar a la universidad, durante 90 minutos. El análisis de los resultados se enfocó en la identificación de errores, categorizados según el uso de objetos matemáticos específicos, o bien, de procedimientos, por ejemplo, la linealidad (o no linealidad). Una forma de discriminar como error generalizado, en los participantes, fue considerar que, si cerca de un tercio del estudiantado muestran el mismo error, es necesario abordarlo académicamente.

La segunda etapa consistió en establecer qué tipo de errores se mantienen luego de que los estudiantes cursaran el primer semestre en la carrera, sin discriminar si aprobaron o no los cursos, con el fin de identificar la persistencia de errores transcurrido un semestre de formación, y transformado,

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.4
E-ISSN: 2215-3470

a la vez, en el pretest de los errores persistentes. Se propuso esta instancia, ya que el primer semestre cuenta con cursos que abordan conceptos matemáticos de álgebra, geometría básica y uso de software (GeoGebra). Para la exploración se construyó un test sobre los errores más frecuentes de la primera etapa, a fin de evidenciar cuáles errores, conceptuales o procedimentales persistían, y cuáles fueron superados, enmarcado en un nuevo instrumento mucho más acotado y dirigido. Se construyó un test con 27 preguntas, de elección múltiple, solicitando desarrollo para cada respuesta, y validado por expertos. Su aplicación fue en septiembre de 2019, durante 90 minutos. El análisis fue centrado en dos áreas: 1) reconocer desde una impresión descriptiva los tipos de errores (aciertos, errores y omisión), y 2) contrastar los errores identificados con los de la etapa anterior, con el fin de determinar su persistencia.

La tercera etapa tuvo un diseño experimental, con la aplicación de situaciones de aprendizaje construidas y centradas en los errores de linealidad, identificados como persistentes, previamente validadas por un grupo de estudiantes de la carrera y el grupo de expertos. La experimentación consistió en tres talleres de 2 a 3 días de duración, desarrollados en el transcurso de dos semanas continuas (taller 1, de lunes a miércoles, taller 2, de viernes a lunes, taller 3, de miércoles a viernes), con actividades que duraron 90 minutos, trabajando y socializando sus conocimientos en grupo y, a la vez, retroalimentados por los profesores-investigadores. Los talleres tuvieron la siguiente participación: el taller 1, con 31 participantes; el taller 2 con 18, y el taller 3 con 14. La experimentación se realizó en septiembre de 2020, en la plataforma Teams®, al encontrarse en confinamiento por el SARV-CoV2, en un trabajo académico 100 % remoto. En este contexto, se observa que la carga académica del estudiantado se transformó en un aumento en la exposición frente al computador, lo que genera dificultades y nuevas adaptaciones en donde la tecnología actúa como mediador de todas las prácticas educativas (Guerrero-Ortiz y Huincahue, 2020). Los datos extraídos consisten en desarrollos de los grupos y notas de campo respecto al trabajo grupal remoto. Los documentos que se originaron fueron: protocolo de construcción de GeoGebra y desarrollos en Word®.

Por último, la cuarta etapa consistió en aplicar un postest, previamente validado, de 6 preguntas de respuesta abierta, sobre la persistencia de errores de linealidad abordados en los talleres, en noviembre de 2020, durante 90 minutos. En esta etapa participaron 24 estudiantes.

Análisis y resultados

Etapa I-Diagnóstico. En esta etapa, diagnóstica y exploratoria, se observó un alto porcentaje de estudiantes que presentó errores y dificultades en conceptos relacionados con la aritmética, el álgebra y la geometría, lo que es concordante con investigaciones vinculadas a la formación universitaria y escolar (Cervantes y Martínez, 2007; Gamboa *et al*., 2019; Escudero y Domínguez, 2014). En general, los resultados muestran la presencia de errores y dificultades en: operatoria de expresiones con raíces, potencias y logaritmos; desigualdades; operatoria algebraica; fracciones algebraicas; factorización; ecuaciones cuadráticas y fraccionarias; identificación de funciones; modelamiento algebraico; transformaciones isométricas; espacio; congruencia; semejanza; ángulos en circunferencia; trigonometría, y procesos recursivos.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.4
E-ISSN: 2215-3470

Algunos errores y dificultades más frecuentes reconocidos en esta etapa se describen en las Tablas 1 y 2. Es importante señalar que, en general, existió una alta omisión de respuestas, particularmente en preguntas relacionadas con raíces, cuadrados de binomio, logaritmos y trigonometría (11, 17, 13 y 28 omisiones, respectivamente).

Etapa II-Persistencia. Luego de cursar un semestre académico, se espera analizar qué tipo de errores o dificultades se mantienen en el conocimiento del estudiante. Los resultados en esta segunda etapa (Tabla 1 y 2), muestran una leve mejora en relación con el diagnóstico inicial, sin embargo, hay errores que mantienen su alta frecuencia y otros que la aumentan, en concordancia con Caronía *et al*. (2014) y Nortes *et al*. (2016).

En el caso de la linealidad, la persistencia ha sido evidenciada en múltiples procedimientos aritméticos y algebraicos, y en gran parte del alumnado. De las puntuaciones obtenidas, alrededor de 19 estudiantes aplicaron linealidad incorrectamente en el primer test y continuó aplicándola erradamente en el segundo test (Tabla 2). Se observa también que, pese a que sigue existiendo omisión de respuestas, esta disminuye en esta etapa, en particular, en las preguntas que involucran raíces, cuadrados de binomio, logaritmos y trigonometría (2, 5, 7 y 18 omisiones, respectivamente), donde además existe una alta presencia de error de linealidad. Esto podría explicar que el error aumente su frecuencia en algunos tópicos.

Etapa III-Propuesta didáctica. Se trabajó en talleres para el abordaje de dificultades y errores de linealidad en expresiones con raíces y cuadrados de binomio (taller 1), trigonometría (taller 2) y logaritmos (taller 3). Las secuencias didácticas en cada taller situaron al alumnado en un proceso de modelización geométrico-algebraico, confrontando el error, para visualizarlo

Tabla 1. *Errores y dificultades con alta frecuencia identificados en las etapas I y II*

Errores y dificultades	N.º de estudiantes Etapa I	Etapa II
Multiplicar desigualdades por números negativos y mantener su orden	28	25
Al dividir una igualdad por un monomio, no divide todos los términos	24	12
Cancela y pierde soluciones en ecuaciones cuadráticas	29	6
Sumar 1 al término general de una sucesión para obtener el término (n + 1)	20	25
Cancelar términos semejantes del numerador y denominador sin factorizar	13	14
Al sustraer expresiones algebraicas solo resta el primer término del que sustrae	13	13
No valida la respuesta en el contexto del problema	15	26
Obtiene información espacial equivocada	21	13
Confunde congruencia con semejanza	17	5

Nota: Fuente propia de la investigación.

Tabla 2. *Errores y persistencia relacionados con linealidad en las etapas I y II*

Errores y persistencia	N.º de estudiantes Etapa I	Etapa II
Aplicar linealización a expresiones con raíces	19	11
Aplicar linealización en cuadrados de binomios	18	19
Aplicar linealización en expresiones con logaritmos	18	17
Aplicar linealización en funciones trigonométricas	8	13

Nota: Fuente propia de la investigación.

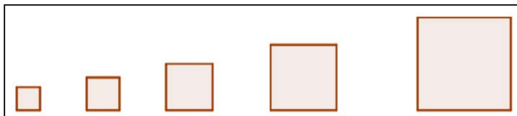
UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.4
E-ISSN: 2215-3470

como fuente de problematización durante las secuencias.

En el desarrollo de los talleres, el alumnado se encontró con las siguientes situaciones: validación de una situación problema, fundada en errores conceptuales y procedimentales; construcción en GeoGebra para confrontar errores; comprensión del procedimiento mal aplicado al comparar diferentes representaciones; explicación del error, utilizando un registro algebraico; y validación del aprendizaje, argumentando matemáticamente.

Resultados taller 1. En esta actividad se formaron 7 grupos de trabajo (G1-G7) para resolver la situación que se muestra en el recuadro 1.



Matilde, una diseñadora gráfica, necesita construir una serie de cuadrados, tal que, cada cuadrado tenga el doble del área que el cuadrado anterior, como se muestra en la figura. Claudia y Felipe, estudiantes de pedagogía en matemática, comentan que la solución a su problema se puede abordar con GeoGebra, además de algunos conocimientos de áreas y un poco de álgebra. Para resolver este problema, Claudia y Felipe proponen a Matilde que determine la medida de los lados de los cuadrados en cada aumento. Por otro lado, la diseñadora se pregunta si sería suficiente con solo duplicar los lados.

Recuadro 1. *Situación problema taller 1*
Fuente propia de la investigación.

Los grupos validaron la situación en conflicto, reconociendo el error a través de la exploración y verificación con GeoGebra, salvo G6 que dio una argumentación incorrecta. Se observaron dos formas diferentes de abordar la situación: la primera con las herramientas de GeoGebra, dibujaron un cuadrado de lado 1 y la sucesión de cuadrados la obtuvieron duplicando el lado del anterior, para luego comprobar que las áreas no se duplicaron (G1 y G3); la segunda dibujando en GeoGebra cuadrados de lados 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{8}$, ..., luego calcularon sus áreas con las herramientas de GeoGebra (G2, G4 y G5).

La mayoría de los grupos representaron la situación cuadrática, asociando la suma de cuadrados con suma de áreas. G3 llegó más lejos, completando cuadrados en su representación gráfica. G4 utilizó la herramienta deslizadores de GeoGebra para comparar las áreas en forma dinámica, estrategia que podría haber facilitado generalizaciones posteriores. Sin embargo, hubo otras respuestas cuyo bosquejo no logró explicar la relación con la situación planteada (G1, G5 y G7). De igual forma, se observó que hubo una mayor dificultad para representar la situación relacionada con la raíz, cinco grupos no entregaron una respuesta satisfactoria (G1, G4-G7). Tal dificultad se podría interpretar como un posible obstáculo para el análisis más formal de las relaciones y deducciones esperadas, ya que la coordinación entre registros geométricos y algebraicos es necesaria para la resolución de problemas empíricos (Torregrosa, 2017).

Por otra parte, los estudiantes evidenciaron, mayoritariamente, no tener dificultades con los desarrollos de cuadrados de binomio ni de explicarlos utilizando registros algebraicos. Sin embargo, se identificó una mayor dificultad al confrontar y expresarlos algebraicamente, en el caso de estar presente la raíz cuadrada. En la respuesta de G4 hay evidencia que podría interpretarse como aplicación de linealidad en la raíz cuadrada.

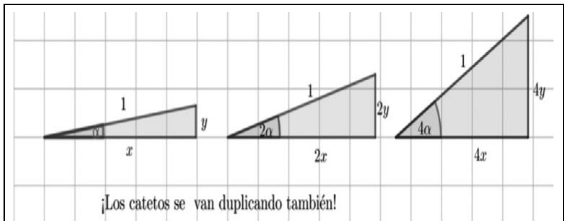
Finalmente, de los 7 grupos participantes, solo 3 grupos validaron su aprendizaje correctamente (G4-G6), utilizando estrategias aritméticas y solo G4 realizó una argumentación algebraica; no lograron

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.4
E-ISSN: 2215-3470

responder correctamente G3 y G7, mostrando dificultad con la traducción del problema.

Resultados taller 2. En esta actividad participaron estudiantes de G1, G3, G4 y G7. La situación problema que debieron resolver se muestra en el recuadro 2.



En la clase de tecnología se propone construir un prototipo para generar energía eólica. El innovador artefacto requerirá de la construcción de 3 triángulos rectángulos para las palas giratorias del aerogenerador. Se cree que, si los triángulos se posicionan de tal forma que, el ángulo basal de uno sea el doble del ángulo basal del que está en la posición anterior, el viento hará girar las palas optimizando la producción de energía. Para construir el prototipo, los estudiantes deciden primero hacer uno de cartón. Teniendo los materiales necesarios para la construcción de los triángulos, se dan cuenta de que no tienen transportador para medir los ángulos. Sin embargo, un grupo de estudiantes afirma que basta con una regla para la construcción de los ángulos. El grupo lo explica con la representación del problema que muestra la figura.

Recuadro 2. *Situación problema taller 2.*
Fuente propia de la investigación.

Todos los grupos validaron la situación con GeoGebra, argumentando desde diferentes caminos: construyendo triángulos rectángulos con ángulos de 20º, 40º y 80º, e hipotenusa 1, para luego, comparar las medidas de los catetos y comprobar que no se duplicaron (G4); la misma conclusión fue obtenida por otros dos grupos que fueron más lejos, abarcando más casos porque utilizaron las herramientas dinámicas de GeoGebra, construyendo los triángulos en una circunferencia unitaria y facilitando la comparación de las medidas de los catetos (G1 y G3). En la respuesta de G7 se construyó una sucesión de triángulos rectángulos que duplica los catetos y también la hipotenusa, para construir triángulos semejantes; cambian las condiciones del problema. Este tipo de error podría tener origen en un análisis parcial de los datos del problema o en la forma en que se construyeron las razones trigonométricas, argumentada por las proporcionalidad y semejanza de triángulos, y manifiestan un obstáculo didáctico (Ruano *et al*., 2008; Socas *et al*., 2016).

En relación con el momento de explicar el error formalmente, solo dos grupos lograron dar un contraejemplo y hacer referencias a las identidades trigonométricas para los ángulos dobles (G3 y G4).

Finalmente, solo G4 logra dar la solución correcta a la situación planteada, utilizando identidades de ángulos dobles para encontrar las medidas correctas de los lados de los triángulos; dos grupos indican, equivocadamente, que necesitan las medidas de los ángulos para resolver el problema (G1 y G7). Esto evidencia dificultad en la comprensión de los conceptos trigonométricos, la que podría estar relacionada con aspectos didácticos, epistemológicos o con conflictos semióticos (Godino, 2012). En esta actividad no se evidenció error de linealidad.

Resultados taller 3. En la tercera actividad participaron estudiantes de G1, G3 y G4. La secuencia didáctica comenzó con una aproximación a la definición del logaritmo y sus propiedades, articulando áreas de triángulos con progresiones geométricas y aritméticas, como muestra el recuadro 3. La confrontación con el error se dio en las preguntas que se plantearon. Se analizaron relaciones, gráficas y propiedades, utilizando las herramientas gráficas, algebraicas, CAS y hoja de cálculos de GeoGebra.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.4
E-ISSN: 2215-3470

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

Sin la tecnología actual es un problema hacer operaciones con números grandes. Sin embargo, el matemático John Napier, ya en el siglo XVII ideó un método para hacerlo, facilitando la vida a muchos calculistas de la época. ¡Napier convirtió productos en sumas y divisiones en resta! Esta técnica se usa hasta nuestros tiempos, por ejemplo, en la representación de curvas que aumentan a gran velocidad como el caso de enfermedades como el Coronavirus. Considera una sucesión de triángulos equiláteros, como muestra la figura, donde el primer triángulo tiene área 1 y el triángulo siguiente tiene el triple de área del triángulo anterior. ¡Con las áreas de los triángulos se puede descubrir el truco que Napier ideó, relacionando progresiones geométricas con aritméticas!

Recuadro 3. *Situación problema taller 3*.
Fuente propia de la investigación.

El alumnado abordó esta secuencia de aprendizaje en forma correcta, salvo G1 que no respondió en forma satisfactoria la actividad de validación de aprendizaje.

En cuanto al desarrollo de las actividades para reforzar la definición de logaritmo y sus propiedades, utilizaron la hoja de cálculo de GeoGebra para ingresar la sucesión de áreas de los triángulos, identificando una progresión geométrica y una progresión aritmética en los exponentes. Asociaron correctamente que las propiedades de las áreas de los triángulos eran consecuencia de las propiedades de las potencias. También, encontraron la relación entre la progresión geométrica y la aritmética, extendiéndola correctamente a los exponentes negativos y deduciendo sus propiedades. Sin embargo, al graficarla, todos los grupos equivocaron su dominio y terminaron graficando la relación inversa. Esta dificultad podría ser interpretada como una confusión de objetos matemáticos al no identificar correctamente las variables dependientes e independientes en la relación. Finalmente, para la identificación y verificación de las propiedades de los logaritmos, usaron la vista CAS de GeoGebra. Asimismo, confrontaron errores haciendo cálculos y comparando resultados e indicando con lenguaje formal. En esta actividad, no se evidenció error de linealidad.

Etapa IV-Postest. De los 24 participantes en el postest, 20 trabajaron en el taller 1, 13 en el taller 2 y 13 en el taller 3. De los cuales 12 estudiantes participaron en los tres talleres y 4 en ninguno.

Los resultados generales mostraron errores de linealización en cuadrados de binomio (1 estudiante), en logaritmos (5 estudiantes) y en trigonometría (1 estudiante); y no se evidenció error de linealización en raíces.

El seguimiento de los desempeños de los que participaron en todos los talleres, en relación con sus errores de linealización, se indican en la Tabla 3. Destacamos que 4 de ellos continuaron mostrando persistencia de errores de linealidad en logaritmos y no evidenciaron error en raíces, en cuadráticas ni en trigonometría, se considera que en las primeras etapas mostraron una alta presencia de errores de linealización en estos objetos.

Es relevante mencionar que ningún estudiante de G4, grupo que linealizó raíz en el taller 1, lo hizo en el postest, sin embargo,

Tabla 3. *Seguimiento de 12 estudiantes participantes de los 3 talleres*

Errores de linealización	Test 1	Test 2	Postest
Aplicaron linealización en raíces y cuadrática	11	9	0
Aplicaron linealización en trigonometría	10	6	0
Aplicaron linealización en logaritmos	6	5	4

Nota: Fuente propia de la investigación.

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.4
E-ISSN: 2215-3470

uno de sus integrantes aplicó linealidad a logaritmos en esta etapa, y no mostró este error en las etapas anteriores. Este resultado es similar a los obtenidos por Caronía *et al*. (2014). Se observa, también, que estudiantes que no participaron en los talleres, linealizaron expresiones con raíces y logaritmos, y uno que participó solo en los talleres 1 y 3, aplicó linealidad en trigonometría.

Finalmente, se evidencia en esta etapa un alto porcentaje de preguntas sin responder en raíces y cuadráticas (4 omisiones), en logaritmos (5 omisiones) y en trigonometría (12 omisiones), pese a estar cursando segundo año de formación. Esto podría estar indicando la presencia de dificultades no identificadas en este estudio y que requerirán ser abordadas.

Conclusiones

En la primera etapa de la investigación se evidenciaron dificultades y errores conceptuales y procedimentales de naturaleza aritmética, algebraica y geométrica, en un alto porcentaje de estudiantes de la formación de profesores de matemática. Estas problemáticas emergen desde los niveles previos y obligatorios de secundaria, cuyos estudiantes ingresan a la educación superior con conocimiento insuficiente (Pino-Fan *et al*., 2018), reflejado en el diagnóstico inicial de esta investigación. La segunda etapa, luego de un semestre de carrera, reveló la persistencia de ciertos errores; destaca, en el análisis, un error procedimental y transversal por variados tópicos matemáticos, que es el uso de la linealidad en objetos matemáticos que no cumplen esta propiedad.

Las propuestas de tareas que incorporan procesos de modelización, según el enfoque de Socas *et al*. (2016), con la mediación de GeoGebra, potenciaron el interés del alumnado e incentivaron el trabajo colaborativo de análisis y reflexión, al definir espacios de trabajo sincrónico, y permitir que se enfrentaran con sus propios errores y exploraran las estrategias correctas. El desarrollo de estas tareas fue realizado con éxito por la mayoría del alumnado que participó en los talleres, sin embargo, en estudiantes que no participaron se evidenció el error en cuadrados de binomio, logaritmos y trigonometría. No se puede afirmar claramente que las tareas resolvieron el error, ya que se necesitaría un estudio de otra naturaleza para llegar a ello, pero se puede afirmar que, atender explícitamente los errores revelados es una estrategia directa de mejora en la formación de profesores de matemática.

En relación con los desempeños finales de los participantes, luego de un año de formación académica, aún existen estudiantes que no logran resolver en forma correcta problemas que involucran raíces, potencias, logaritmos y trigonometría, algunos siguen cometiendo errores de linealización, luego de identificada la persistencia de estos. Respecto a los estudiantes que realizaron la totalidad de los talleres, ninguno mostró errores de linealización en cuadráticas, raíces y trigonometría, y solo 4 de ellos linealizó expresiones con logaritmos, lo que invita a analizar con mayor profundidad este tipo de error, ya que las dificultades implícitas son, en ocasiones, muy complejas de atender didácticamente (Mena-Lorca *et al*., 2015).

En consecuencia, para que las dificultades y errores que el estudiantado en formación inicial docente incurre, no interfieran en la consolidación de los conceptos matemáticos ni en la progresión de su formación, es necesario que la práctica docente incorpore actividades de identificación de dificultades y errores, abordándolos especialmente en los primeros años de

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

la carrera. Se sugiere que estas actividades se formulen en contextos de modelización y usos de softwares para facilitar la visualización y la generalización de los conceptos matemáticos que son potenciales generadores de errores.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener algún conflicto de interés.

Declaración de la contribución de los autores

Todos los autores afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo. El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: M.A.P. 34 %, M.S.G. 33 % y J.H.A. 33 %.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente M.A.P., previa solicitud razonable.

Referencias

Agencia de Calidad de la Educación. (2017). *Aprendiendo de los errores. Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de II medio en las pruebas Simce y sus implicancias pedagógicas*. Ministerio de Educación.

Bejarano, M. E., & Ortiz, J. (2018). Modelización matemática y GeoGebra en el estudio de funciones. Una experiencia con estudiantes de ingeniería. *Revista Ciencias de la Educación*, *27*(50), 348-379.

Bolaños-Barquero, H., & Segovia, I. (2021). Sentido estructural de los estudiantes de primer curso universitario. *Uniciencia*, *35*(1), 152-168. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.10

Bolaños-González, H., & Lupiáñez-Gómez, J. (2021). Errores en la comprensión del significado de las letras algebraicas en estudiantado universitario. *Uniciencia, 35*(1), 1-18. https://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.1

Caronía, S., Rivero, M., Operuk, R., & Mayol. C. (2014). Los conocimientos matemáticos en el umbral de la universidad. *Rev. Cienc. Tecnol, 16*(21), 5-11.

Cervantes Campo, G., & Martínez, R. (2007). Sobre algunos errores comunes en desarrollos algebraicos. *Zona Próxima*, *8,* 34-41.

Cervantes Campo, G., & Martínez, R. (2013). Una alternativa para prevenir el error de linealización $(x \pm y)^n = x^n \pm y^n$. *Zona Próxima*, 18, 103-112.

Díaz, M., Haye, E., Montenegro, F., & Córdoba, L. (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 41, 20-38.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME*, *9*(1), 143-168.

Escudero, M., & Domínguez, J. (2014). De los errores identificados en la investigación a los errores encontrados en un aula de primero de bachillerato. *Revista de Didáctica de la Matemáticas*, *86*(2), 111-130.

Ferrando, I. (2019). Avances en las investigaciones en España sobre el uso de la modelización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Investigación en Educación Matemática*, 23, 43-64.

Gamboa, R., Castillo, M., & Hidalgo, R. (2019). Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad. *Actualidades Investigativas en Educación, 19*(1), 1-31. https://doi.org/10.15517/aie.v19i1.35278

García, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. L. (2012). Antecedentes y fundamentación de una investigación sobre errores en la resolución de tareas algebraicas. En D. Arnau y otros (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática,* (pp. 139-148). Universidad de Valencia.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.4
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Godino, J., Cajaraville, J., Fernández, T., & Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(2), 109-130. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n2.653

González, A., Muñoz, L., & Rodríguez, L. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula Abierta, 47*(4), 449-462. https://doi.org/10.17811/rifie.47.4.2018.449-462

González, M., Gómez, P., & Restreo, A. (2015). Usos del error en la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Educación, 370*, 71-95.

Guerrero-Ortiz, C., & Huincahue, J. (2020). Mathematics Teacher' perceptions and adaptations in developing online classes-ideas for teacher training. *Journal of physics: conference series*, 1702. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1702/1/012019

Iranzo, N., & Fortuny, J. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las ciencias, 27*(3), 433-446.

López, R., Montenegro, E., y Guillot, L. (2018). Algunos errores matemáticos básicos y su manifestación en la educación superior. *Revista de Investigación, Formación y Desarrollo: Generando Productividad Institucional*, *6*(3), 1-9. https://doi.org/10.34070/rif.v6i3.117

Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J., Montoya-Delgadillo, E., Morales, A., y Parraguez, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: Persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(3), 329-358. https://doi.org/10.12802/relime.13.1832

Mineduc. (2009). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media*. Ministerio de Educación.

Mineduc. (2018). *Resultados Nacionales. Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente*. CPEIP, Ministerio de Educación.

Nortes, R., & Nortes, A. (2016). Resolución de problemas, errores y dificultades en el grado de maestro de primaria. *Revista de Investigación Educativa, 34*(1), 103-117. https://doi.org/10.6018/34.1.229501

Pino-Fan, L., Guzmán-Retamal, I., Larraín, M., & Vargas-Díaz C. (2018). La formación inicial de profesores en Chile: 'Voces' de la comunidad chilena de investigación en educación matemática. *Uniciencia*, *32*(1), 68-88. https://doi.org/10.15359/ru.32-1.5

Ramírez-Uclés, R., Flores, P., & Ramírez-Uclés, I. (2018). Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(1), 29-56. https://doi.org/10.12802/relime.18.2112

Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de la matemática. En Kilpatrick, y otros (Eds.), *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes, resolución de problemas, evaluación, historia* (pp.69-108*)*. Una empresa docente.

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. *PNA, 9*(4), 273-293.

Ruano, R., Socas, M., & Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA, 2*(2), 61-74.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho y otros (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 19-52). SEIEM.

Socas, M., Hernández, J., & Palarea, M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de matemáticas de estudiantes para profesor de educación primaria y secundaria. En González y otros (Eds.), *Investigaciones en pensamiento numérico y algebraico e historia de las matemáticas y educación matemática* (pp.145-154). SEIEM.

Socas, M., Ruano, R. M., & Hernández, J. (2016). Análisis didáctico del proceso matemático de modelización en alumnos de secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9, 21 - 41. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i9.146

The Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M) (2013). *Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries.* International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.4
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Torregrosa, G., Quesada, H., & Penalva, M. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(3), 327-340. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v28n3.187

Torregrosa, G. (2017). Coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas: Relación entre geometría y álgebra. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 12, 1-17. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i12.198

Villagrán, W., Cruz, E., Barahona, F., Barrera, O., & Insuasti, R. (2018). Utilización de GeoGebra como herramienta metodológica en la enseñanza de la geometría analítica y su incidencia en el control del rendimiento académico de estudiantes del primer semestre de ingeniería. *Ciencias de la educación, 4*(4), 128-144. https://doi.org/10.23857/dc.v4i4.827

Zaldívar, J., & Briceño, E. (2019). ¿Qué podemos aprender de nuestros estudiantes? Reflexiones en torno al uso de las gráficas. *Educación Matemática, 3*(2), 212-240. https://doi.org/10.24844/EM3102.09

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-17. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr